17-10-18

Ορισμός

$a \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ όταν $\forall \delta > 0$, $\underbrace{N_\delta^*(a)}_{(a-\delta,\, a+\delta) \setminus \{a\}} \cap A \neq \emptyset$

Πρόταση

Έστω A άνω (κάτω) φραγμένο. Τότε $\sup A \in A$ ή $\sup A$ είναι σ.σ. του A (αντίστοιχα $\inf A \in A$ ή $\inf A$ είναι σ.σ. του A)

πχ. $A = \left\{ \frac{1}{\nu} : \nu \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup A = 1$, $\inf A = 0$, 0 σ.σ. του A

Απόδειξη

Έστω ότι $\sup A \notin A$

- $\forall x \in A$, $x \leq \sup A$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x = x_\varepsilon \in A$, τ.ω. $\sup A < x + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists x=x_\varepsilon\in A$, τ.ω. $x\le \sup A < x+\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists x=x_\varepsilon\in A$, τ.ω. $\sup A-\varepsilon < x\le \sup A<\sup A+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists x=x_\varepsilon\in A$, τ.ω. $\underline{\sup A-\varepsilon<x<\sup A+\varepsilon}$

ή $x\in(\sup A-\varepsilon, \sup A+\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists x=x_\varepsilon\in A$ τ.ω. $x\in(\sup A-\varepsilon,\sup A+\varepsilon)\setminus\{\sup A\}$

$= N^*_\varepsilon(\sup A) \Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ N^*_\varepsilon(\sup A)\cap A$

Έστω $A\subseteq X\subseteq \mathbb{R}$. Αν $X = A\cup A' = \overset{\text{κλειστή θήκη}}{\overline{A}}$, τότε το A λέγεται (παντού) πυκνό στο X

<u>Θεώρημα</u>

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι παντού πυκνά στο $\mathbb{R}$

<u>Ακολουθίες</u>

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ Συμβολισμός $\to \{a_n\}$

$f(1), f(2), f(3), \dots$

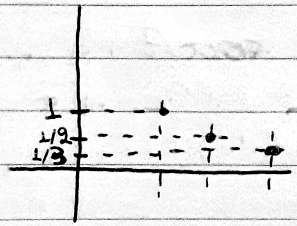
$a_1, a_2, a_3, \dots$

$a_i = f(i),\ i\in\mathbb{N}$

πχ (1) $a_n=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\to$ σταθερή ακολουθία

(2) $a_n = 1/n$

$a_1=1,\ a_2=1/2,\ a_3=1/3,\ a_4=1/4$



(3) $a_1=0, a_2=1, a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}, n\geq 3$

$a_1=0, a_2=1, a_3=1/2, a_4=3/4$

(4) $a_n=1/n \quad, n\in\mathbb{N}$
$b_1=1/2, b_2=1, b_n=1/n \quad, n\geq 3$

$a_1=1, a_2=1/2, a_3=1/3, a_4=1/4$
$b_1=1/2, b_2=1, b_3=1/3, b_4=1/4\ldots$

$\{a_n\}\neq\{b_n\}$

Ορισμός
$\{a_n\}=\{b_n\}$ όταν $a_n=b_n, \forall n\in\mathbb{N}$
Ερώτηση: Πως εξαιρώ τους πρώτους k όρους της a_n?
$b_n=a_{n+k} \quad, n\in\mathbb{N}$

Ορισμός
Σύνολο τιμών της ακολουθίας $\{a_n\}:\{a_1, a_2, a_3,\ldots\}=$
$\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

Στο παράδειγμα (4) $\{a_n\}\neq\{b_n\}$, όμως
$\{a_1, a_2,\ldots\}=\{b_1, b_2,\ldots\}$

$\{a_n\}$ άνω (κάτω) φραγμένη αν $\exists M\in\mathbb{R}$ (αντ. $\exists m\in\mathbb{R}$) τω $\forall n\in\mathbb{N}, a_n\leq M$ (αντ. $a_n\geq m$). Η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leq M$

Γενικότερα $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $1/n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

- $a_n = 1 + 1/n$

  a_n πλησιάζει το 1 όταν $n \to +\infty$

  $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0$ τ.ω. $|a_n - 1| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

<u>Ορισμός</u>

Η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ ή $a_n \to \ell$ ή $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

ή $\lim a_n = \ell$ ή "Το όριο της $\{a_n\}$ όταν $n \to +\infty$ είναι ℓ", όταν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 (=n_0(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

<u>Παράδειγμα</u>

$a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 = \ell$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Ψάχνω $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - 0| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

Ψάχνω, λοιπόν, $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$

Παίρνω $n_0 > 1/\varepsilon$, τότε $\forall n \geq n_0$, $n \geq n_0 > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n < \varepsilon$

<u>Ερώτηση</u> $\to$ Θα είχε νόημα μόνο για σταθερές ακολουθίες.

Τι γίνεται όταν $\forall \varepsilon \geq 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$,
$|a_n - \ell| = 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $a_n = \ell$.

Παίρνω $\varepsilon = 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \ell| = 0 \Rightarrow$
$\forall n \geq n_0$, $a_n = \ell$

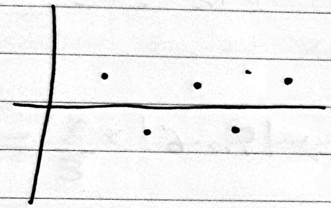
Αν $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_n = \ell$, $\forall n \geq n_0$, τότε η a_n λέγεται τελικά <u>σταθερή</u>

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ αν $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$

5ος <u>Παράδειγμα</u>

$a_n = (-1)^{n+1}$



$\nexists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\underbrace{\forall n \geq n_0,}_{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell}$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$

Έστω ότι $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$

$|\overset{1}{a_n} - \ell| < \varepsilon$ όταν $n \to$ περιττός $\to |1 - \ell| < \varepsilon$

$|\overset{-1}{a_n} - \ell| < \varepsilon$ όταν $n \to$ άρτιος $\to |-1 - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $|1 - \ell| < \varepsilon$, $|-1 - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 - \ell = 0 \\ -1 - \ell = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ell = 1 \\ \ell = -1 \end{array}\right| \Rightarrow 1 = -1$, <u>Άτοπο</u>

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-4}{2-3n} = -\frac{5}{3} = \ell$$

$\lim a_n = \ell$ αν, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0\ (n_0(\varepsilon))$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ψάχνω $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{5n-4}{2-3n} - \frac{-5}{3} \right| < \varepsilon \iff$$

$$\left| \frac{15n - 12 + 10 - 15n}{6-9n} \right| < \varepsilon \iff$$

$$\left| \frac{-2}{6-9n} \right| < \varepsilon \iff |6-9n| > \frac{2}{\varepsilon} \iff |9n-6| > \frac{2}{\varepsilon} \iff$$

$$9n - 6 > \frac{2}{\varepsilon} \iff \quad \text{ή} \quad 9n-6 < -\frac{2}{\varepsilon}$$

$$9n > \frac{2}{\varepsilon} + 6 \iff \qquad 9n < -\frac{2}{\varepsilon} + 6 < 6$$

$$n > \frac{2}{9\varepsilon} + \frac{2}{3} \qquad n < 6/9.$$

Αδύνατο

Παίρνω ως n_0 οποιοδήποτε $n \geq \frac{2}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$

Τότε $\forall n \geq n_0$, $\left| \frac{5n-4}{2-3n} - \frac{-5}{3} \right| < \varepsilon$

Θεώρημα

Όταν $\lim_{n\to+\infty} a_n$ υπάρχει τότε είναι μοναδικό

Απόδειξη

Έστω l, m όρια της $\{a_n\}$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0''$, $|a_n - l| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0'$, $|a_n - m| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0''$, $|a_n - m| < \varepsilon$.

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\} \geq n_0, n_0'$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|l-m| = |(l-a_n) + (a_n - m)| \leq |l-a_n| + |a_n - m| = |a_n - l| + |a_n - m|$ *

Παίρνω $n = n_0'' \Rightarrow |a_{n_0''} - l| < \varepsilon$

$|a_{n_0''} - m| < \varepsilon$

* $|l-m| \leq |a_{n_0''} - l| + |a_{n_0''} - m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow |l-m| < 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

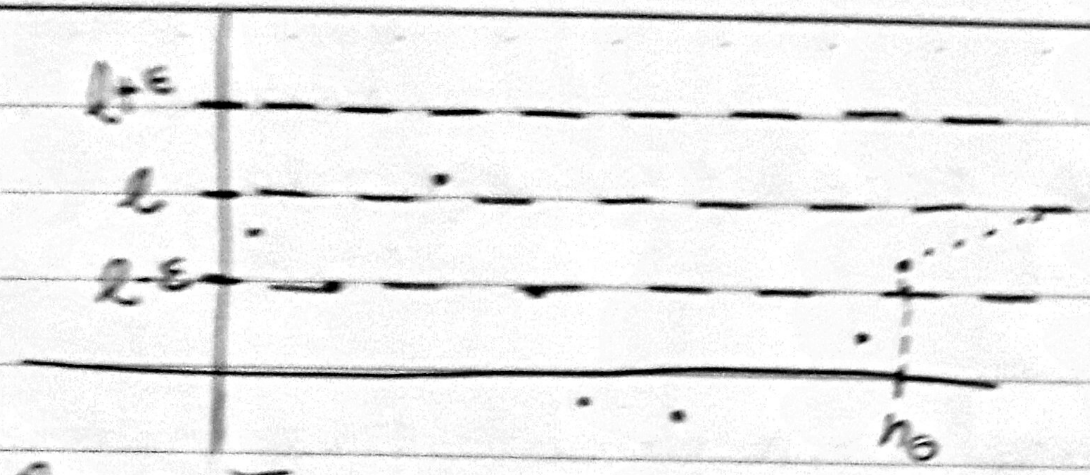
$\Rightarrow l - m = 0$

$\Rightarrow l = m$

*Μια ακολουθία που έχει όριο ονομάζεται συγκλίνουσα

Θεώρημα

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη



Απόδειξη

Παίρνω π.χ. $\varepsilon=1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0,\ -1+l < a_n < 1+l$

* Έστω ότι $\lim a_n = l$

Θέτω $M_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \geq a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$

$m_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \leq a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$

$M = \max\{M_1, 1+l\} \geq a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$

$m = \min\{m_1, -1+l\} \leq a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$